

Incertitudes sur les estimations de puissances indirectes en cyclisme sur route

28/12/14

Frédéric Portoleau

Table des matières

1	Introduction.....	2
2	Rappel sur la modélisation du déplacement d'un cycliste.....	2
3	Application du principe des incertitudes composées aux estimations de puissance :.....	3
3.1	Incertitudes-type de chacune des grandeurs.....	4
3.2	Incertitude élargie et facteur d'élargissement.....	4
3.3	Logiciel de calcul.....	5
3.4	Incertitude-type des paramètres du modèle.....	5
3.5	Incertitude-type composée sur la puissance, coureur de 63kg qui développe 6 w/kg (378 watts), sur une distance de 10km.....	6
3.6	Incertitude-type composée sur la puissance étalon, coureur de 70kg qui développe 410 watts, pas d'erreur sur la masse du coureur, sur une distance de 10km.....	7
3.7	Incertitude-type composée sur la puissance réelle, coureur de 63kg qui roule entre 17 et 25 km/h sur une pente de 8% sur une distance de 10km.....	8
3.8	Contribution à la variance.....	9
3.9	Explications sur les marges d'erreur des paramètres d'entrée.....	10
4	Conclusion.....	13

1 Introduction

Après un court rappel sur la modélisation du déplacement du cycliste, les incertitudes sur la puissance seront estimées à partir d'une approche probabiliste.

La théorie utilisée est expliquée dans le document suivant :

http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/07/0/LyceegT_ressources_MathPC_Mesure_et_incertitudes_eduscol_214070.pdf

Voir aussi le guide pour l'expression de l'incertitude de mesure :

Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)

<http://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html>

2 Rappel sur la modélisation du déplacement d'un cycliste.

La puissance développée par un cycliste s'exprime de la manière suivante dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme (pas d'accélération), sur un bon revêtement (route lisse sans trous ni pavés), sans vent et sans drafting :

$$P_{méca} = [(m_c + m_v)g \sin \alpha V + C_r (m_c + m_v)g \cos \alpha V + \frac{1}{2} \rho SC_x V^3] / eff$$

avec

m_c : masse corporelle coureur en kg

m_v : masse vélo plus équipement en kg

M: masse totale $m_c + m_v$

g : accélération de la pesanteur $9,81 m s^{-2}$

V : vitesse en $m s^{-1}$

α angle de la pente

C_r coefficient de roulement

ρ masse volumique de l'air en $kg m^{-3}$

SC_x surface frontale effective en m^2

eff efficacité de la transmission vers la roue arrière

Le cycliste doit vaincre la gravité, les forces de frottement de roulement et les forces aérodynamiques. Point négligés sur des dépenses d'énergie : vibrations, mouvement verticaux, variation d'énergie cinétique. Le mouvement rectiligne uniforme ne correspond pas tout à fait à la réalité.

Une modélisation plus sophistiquée, qui tient compte du vent, des variations d'énergie cinétique est proposée par James C. Martin (Validation of a mathematical model for road cycling power, Journal of applied biomechanics, 1998). Pour appliquer ce modèle il faut connaître les variations de vitesse des coureurs ainsi que les propriétés mécaniques de leurs roues comme le moment d'inertie. Ce modèle a été vérifié expérimentalement. Une différence de 2,2% avec le SRM a été obtenue. Le contexte de l'estimation n'était pourtant pas favorable avec une route en faible pente et 74% de la puissance développée pour vaincre les résistances aérodynamiques. Cette résistance à l'avancement est la plus complexe à évaluer : il faut connaître avec une bonne précision le vent (vitesse et direction) et le SC_x .

Expression de la puissance en fonction des paramètres mesurés :

L'angle de la pente dépend des altitudes d'arrivée h_2 et de départ h_1 et de la distance parcourue (hypoténuse du triangle rectangle)

$$\sin \alpha = \frac{(h_2 - h_1)}{d}$$

La vitesse dépend bien sûr de la distance d et du temps de parcours t

$$V = \frac{d}{t}$$

L'angle est inférieur à 5 degrés et les résistances de roulement sont faibles par rapport aux autres résistances. On peut simplifier l'expression avec $\cos \alpha \sim 1$

L'expression de la puissance mécanique externe du cycliste devient :

$$P_{méca} = [(m_c + m_v)g \frac{(h_2 - h_1)}{t} + C_r(m_c + m_v)g \frac{d}{t} + \frac{1}{2}\rho SC_x(d/t)^3] / \text{eff}$$

3 Application du principe des incertitudes composées aux estimations de puissance :

La puissance mécanique est une fonction f des variables aléatoires indépendantes suivantes:

$$P_{méca} = f(m_c, m_v, h_2, h_1, d, t, C_r, SC_x, \text{eff})$$

Pour simplifier les calculs, l'incertitude-type sur la densité de l'air ne sera pas prise en compte, de plus elle dépend des altitudes (ce n'est pas une variable indépendante).

A partir de la connaissance de l'incertitude-type de chacune des grandeurs $u(x_i)$, nous pouvons déterminer l'incertitude-type de $P_{méca}$ notée $u_c(P_{méca})$

Dans le cas général, les erreurs sont considérées comme petites devant les valeurs des grandeurs, on utilise la formule :

$$u_c^2(P_{méca}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

où $u(x_i)$ est l'incertitude-type sur x_i et $u_c(P_{méca})$ est l'incertitude-type composée sur $P_{méca}$

$$u_c^2(P_{méca}) = \sum_{i=1}^n (c_i u(x_i))^2 \quad \text{avec} \quad c_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mu) \quad \text{où } \mu$$

L'expression ci dessus s'écrit également
représente la valeur de référence pour chacune des variables (une donnée ou une moyenne de donnée)

Les dérivées partielles sont appelées coefficients de sensibilité. Elles décrivent comment varie l'estimation de sortie y en fonction des variations dans les valeurs des estimations d'entrée x_1, x_2, \dots, x_n

La variance composée obtenue est:

$$u_c^2(P_{méca}) = (c_1 u(m_c))^2 + (c_1 u(m_v))^2 + (c_3 u(h_2))^2 + (c_4 u(h_1))^2 + (c_5 u(d))^2 + (c_6 u(t))^2 + (c_7 u(C_r))^2 + (c_8 u(SC_x))^2 + (c_9 u(eff))^2$$

avec les coefficients c_i qui ont pour valeur :

$$c_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial m_c} \right) (\mu) = \left[g \frac{(h_2 - h_1)}{t} + C_r g \frac{d}{t} \right] / eff$$

avec les valeurs de référence pour chacune des variables

$$c_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial m_v} \right) (\mu) = \left[g \frac{(h_2 - h_1)}{t} + C_r g \frac{d}{t} \right] / eff$$

$$c_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial h_2} \right) (\mu) = \left[M \frac{g}{t} \right] / eff$$

$$c_4 = \left(\frac{\partial f}{\partial h_1} \right) (\mu) = - \left[M \frac{g}{t} \right] / eff$$

$$c_5 = \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) (\mu) = \left[C_r M \frac{g}{t} + \frac{3}{2} \rho SC_x (d^2 / t^3) \right] / eff$$

$$c_6 = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) (\mu) = \left[-M g \frac{(h_2 - h_1)}{t^2} - C_r M g \frac{d}{t^2} - \frac{3}{2} \rho SC_x (d^3 / t^4) \right] / eff$$

$$c_7 = \left(\frac{\partial f}{\partial C_r} \right) (\mu) = \left[M g \frac{d}{t} \right] / eff$$

$$c_8 = \left(\frac{\partial f}{\partial SC_x} \right) (\mu) = \left[\frac{1}{2} \rho (d / t)^3 \right] / eff$$

$$c_9 = \left(\frac{\partial f}{\partial eff} \right) (\mu) = - \left[M g \frac{(h_2 - h_1)}{t} + C_r M g \frac{d}{t} + \frac{1}{2} \rho SC_x (d / t)^3 \right] / eff^2$$

Finalement l'incertitude-type composée sur la puissance est la racine carrée de la variance composée.

3.1 Incertitudes-type de chacune des grandeurs

L'incertitude-type sur certaines variables peut être estimée par utilisation d'un modèle probabiliste décrivant la loi de propagation de l'erreur sur cette variable.

Nous allons utiliser la loi rectangulaire ou uniforme car nous ne connaissons qu'une majoration de l'erreur (explications de la loi rectangulaire dans le document de référence)

3.2 Incertitude élargie et facteur d'élargissement

La détermination du facteur d'élargissement correspond à ce qu'on appelle en statistique la détermination d'un intervalle de confiance à un certain niveau de confiance.

Nous sommes dans le cas où :

- 1) l'estimation y du mesurande Y est obtenue à partir d'un nombre significatif des grandeurs d'entrée qui peuvent être décrites par des lois de probabilité raisonnables telles que les lois normales ou rectangulaires.
- 2) Les incertitudes-types de ces estimations contribuent de manière comparable à l'incertitude-type composée du résultat de mesure y .
- 3) L'approximation linéaire supposée par la loi de propagation de l'incertitude est convenable.

Le facteur d'élargissement sera égal à 2.

L'intervalle $[y - 2u_c(y); y + 2u_c(y)]$ contient alors 95% des valeurs que l'on peut raisonnablement associer à la grandeur $P_{méca}$

3.3 Logiciel de calcul

Les calculs ont été réalisés avec le logiciel Gum_MC téléchargeable ici :
http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html

3.4 Incertitude-type des paramètres du modèle

Deux cas de figure sont proposés :

1) Incertitude-type minimale

Les paramètres d'entrée du modèle sont bien maîtrisés avec en particulier une cartographie de précision et la masse du coureur connue.

2) Incertitude-type maximale

Masse du coureur approximative, cartographie de qualité médiocre, SCx et Cr mal estimés.

Composantes	Erreur minimale	Erreur maximale
Masse coureur	+/- 1 kg	+/- 3 kg
Masse vélo plus équipement	+/- 0,5 kg	+/- 1 kg
Altitudes (h1 et h2)	+/- 1 m	+/- 5 m
Distance	+/- 50 m	+/- 200 m
Temps de parcours	+/- 2 s	+/- 10 s
Coefficient de roulement	+/- 0.001	+/- 0.001
Surface frontale effective	+/- 0.03 m ²	+/- 0.05 m ²
Efficacité de la transmission	+/- 0.005	+/- 0.01

Les incertitudes-type s'obtiennent en divisant l'erreur par $\sqrt{3}$ (cas d'une loi rectangulaire)

Composantes		Incertitude-type minimale	Incertitude-type maximale
Masse coureur	$u(m_c)$	+/- $1/\sqrt{3}$ kg	+/- $3/\sqrt{3}$ kg
Masse vélo plus équipement	$u(m_v)$	+/- $0,5/\sqrt{3}$ kg	+/- $1/\sqrt{3}$ kg
Altitudes (h1 et h2)	$u(h2), u(h1)$	+/- $1/\sqrt{3}$ m	+/- $5/\sqrt{3}$ m
Distance	$u(d)$	+/- $50/\sqrt{3}$ m	+/- $200/\sqrt{3}$ m
Temps de parcours	$u(t)$	+/- $2/\sqrt{3}$ s	+/- $10/\sqrt{3}$ s
Coefficient de roulement	$u(C_r)$	+/- $0.001/\sqrt{3}$	+/- $0.001/\sqrt{3}$
Surface frontale effective	$u(Scx)$	+/- $0.03/\sqrt{3}$ m ²	+/- $0.05/\sqrt{3}$ m ²
Efficacité de la transmission	$u(ef)$	+/- $0.005/\sqrt{3}$	+/- $0.01/\sqrt{3}$

3.5 Incertitude-type composée sur la puissance, coureur de 63kg qui développe 6 w/kg (378 watts), sur une distance de 10km

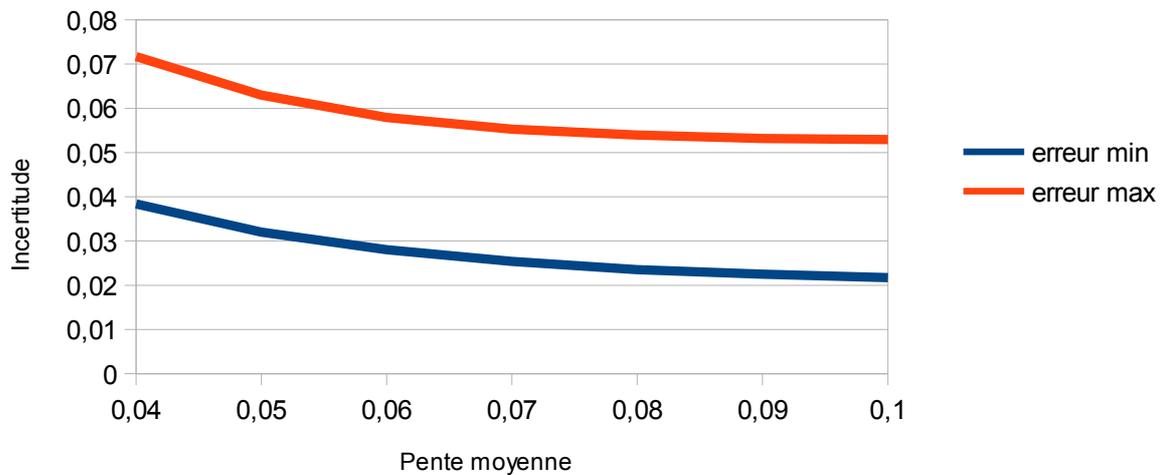
Appliquons maintenant les calculs théoriques sur un cas concret : un coureur de 63 kg qui développe 6 w/kg sur une distance de 10km. Les incertitudes-types sont calculées avec le logiciel Gum_MC.

Les incertitudes-types en fonction de la pente obtenues sont les suivantes :

Pente moyenne	Avec Incertitude-type minimale	Avec Incertitude-type maximale
10,00%	(378 +/- 8) watts	(378 +/- 20) watts
9,00%	(378 +/- 8,5) watts	(378 +/- 20) watts
8,00%	(378 +/- 9) watts	(378 +/- 20,5) watts
7,00%	(378 +/- 9,5) watts	(378 +/- 21) watts
6,00%	(378 +/- 10,5) watts	(378 +/- 22) watts
5,00%	(378 +/- 12) watts	(378 +/- 24) watts
4,00%	(378 +/- 15) watts	(378 +/- 27) watts

incertitude type relative en fonction de la pente

coureur 63 kg 6 w/kg



L'incertitude-type composée sur la puissance dépend de la pente. Au delà de 6% de pente moyenne, elle est inférieure à 3% dans la configuration minimale des incertitudes-type de chaque grandeur (courbe « erreur min »). Elle se stabilise mais ne descend pas en dessous de 2% à cause de l'incertitude-type sur la masse du coureur.

En dessous de 6%, la vitesse de déplacement dépasse les 25km/h pour un coureur de haut niveau qui développe 6 w/kg. L'erreur augmente en raison de l'incertitude-type élevée sur le SCx.

Sur la plat, l'incertitude-type dépasse les 15% si on connaît le SCx avec une marge d'erreur de 0,05m².

L'incertitude-type composée dans le cas où les paramètres d'entrée du modèle sont mal maîtrisés, dépasse les 7% pour les pentes inférieures à 4% et ne descend pas en dessous de 5% pour les pentes comprises entre 7 et 10%.

3.6 Incertitude-type composée sur la puissance étalon, coureur de 70kg qui développe 410 watts, pas d'erreur sur la masse du coureur, sur une distance de 10km

Un deuxième cas concret : un coureur étalon de 70 kg développe 410 watts sur une distance de 10 km. Les incertitudes-types sont calculées avec le logiciel Gum_MC.

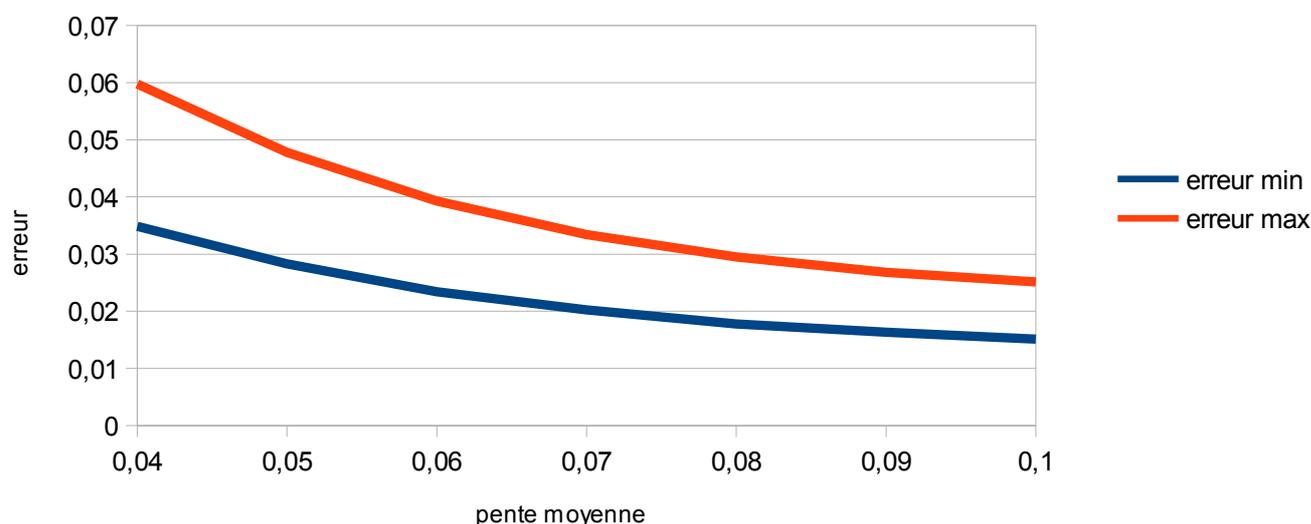
Les incertitudes-types en fonction de la pente obtenues avec Gum_MC sont les suivantes :

Pente moyenne	Avec Incertitude-type minimale	Avec Incertitude-type maximale
10,00%	(410 +/- 6) watts	(410 +/- 10) watts
9,00%	(410 +/- 7) watts	(410 +/- 11) watts
8,00%	(410 +/- 8) watts	(410 +/- 12) watts
7,00%	(410 +/- 9) watts	(410 +/- 14) watts
6,00%	(410 +/- 10) watts	(410 +/- 16) watts

5,00%	(410 +/- 12) watts	(410 +/- 20) watts
4,00%	(410 +/- 15) watts	(410 +/- 25) watts

incertitude-type relative en fonction de la pente

coureur etalon 410 watts



Dans le cas du calcul de la puissance étalon, il n'y a pas d'erreur sur la masse du coureur qui est supposée être à 70 kg au moment du dernier col de l'étape. Cette puissance étalon est une grandeur moins intéressante que la puissance réellement développée. Elle permet néanmoins des comparaisons entre cols et coureurs au fil des années.

3.7 Incertitude-type composée sur la puissance réelle, coureur de 63kg qui roule entre 17 et 25 km/h sur une pente de 8% sur une distance de 10km

Un troisième cas est proposé : celui d'un coureur de 63 kg qui roule entre 17 et 25 km/h sur une pente de 8% et sur une distance de 10km. Les incertitudes-types sont calculées avec le logiciel Gum_MC.

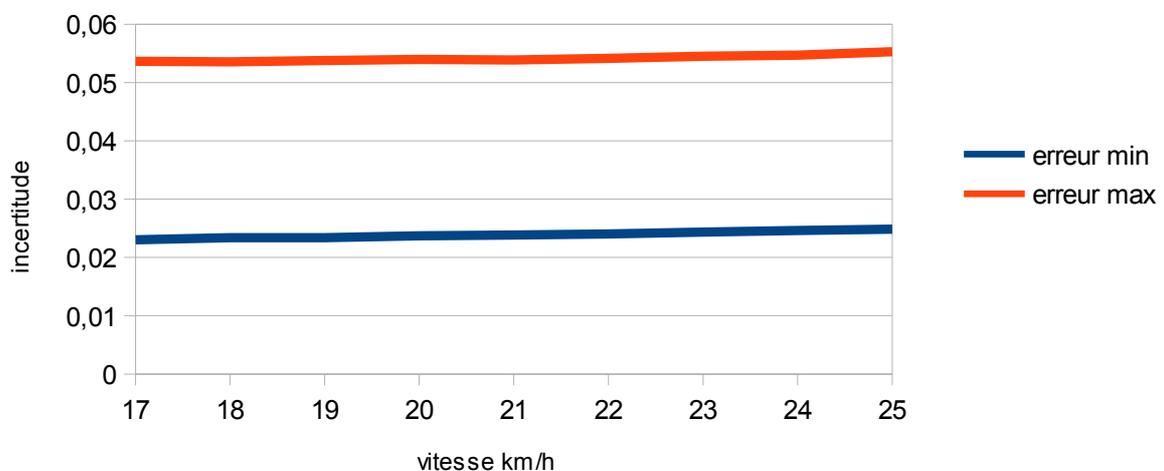
Les incertitudes-types en fonction de la vitesse obtenues sont les suivantes :

Vitesse moyenne en km/h	Avec Incertitude-type minimale	Avec Incertitude-type maximale
17	(300 +/- 7) watts	(300 +/- 16) watts
18	(320 +/- 7,5) watts	(320 +/- 17) watts
19	(340 +/- 8) watts	(340 +/- 19) watts
20	(361 +/- 8,5) watts	(361 +/- 20) watts
21	(383 +/- 9,5) watts	(383 +/- 21) watts

22	(404 +/- 10) watts	(404 +/- 22) watts
23	(427 +/- 10,5) watts	(427 +/- 24) watts
24	(449 +/- 11) watts	(449 +/- 25) watts
25	(473 +/- 12) watts	(473 +/- 27) watts

incertitude type en fonction de la vitesse

penne 8% coureur 63 kg



L'incertitude-type augmente progressivement avec la vitesse. Plus le coureur roule vite, plus il produit de la puissance pour vaincre les résistances aérodynamiques.

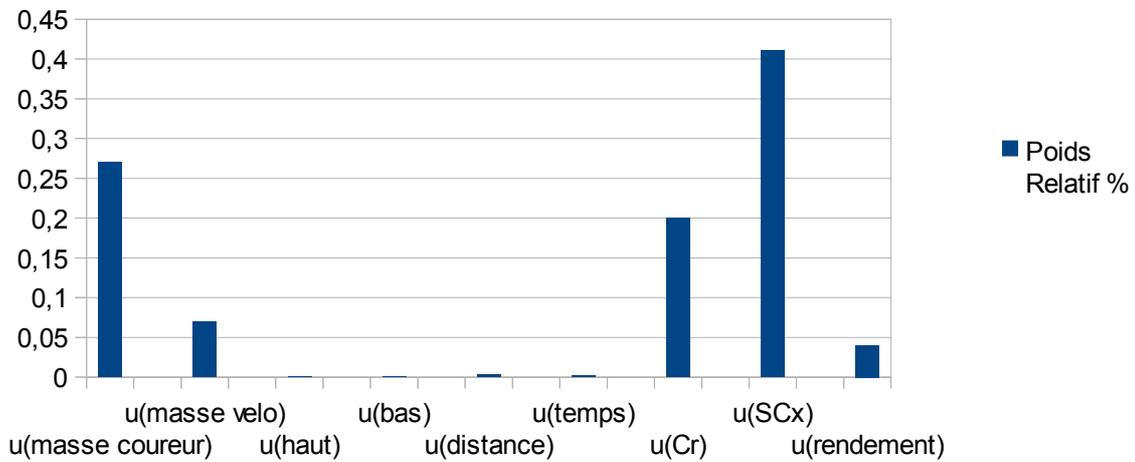
3.8 Contribution à la variance

Quelles sont les contributions des paramètres dans l'incertitude-type composée de la puissance ?

Paramètres d'entrées bien maîtrisés

contribution à la variance

incertitude-type minimale coureur 63 kg

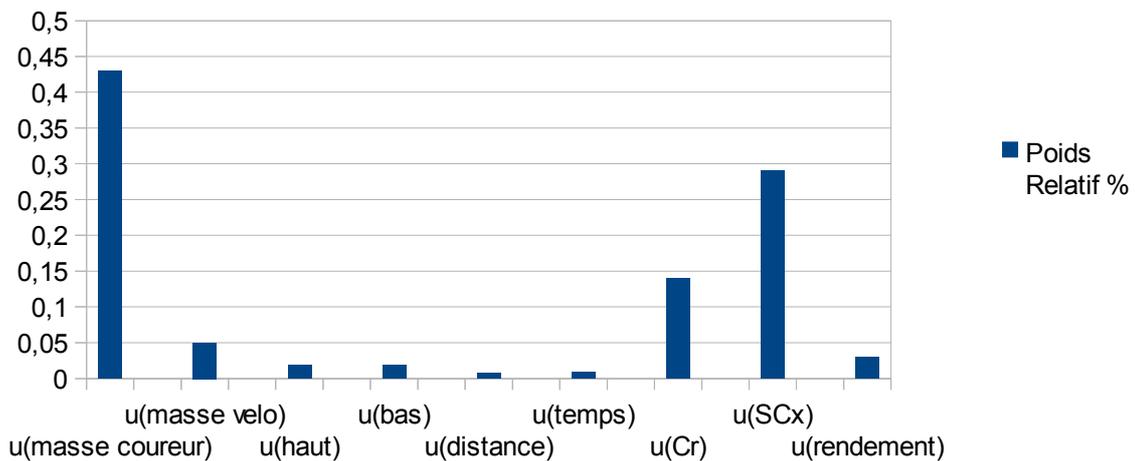


Dans les cas où les paramètres sont maîtrisés avec les incertitudes-type minimale, le Scx est la composante qui a le plus de poids sur l'incertitude composée. Les contributions sur la variance de l'erreur du temps de parcours, des altitudes et de la distance sont négligeables.

Paramètres d'entrées moins bien connus

contribution à la variance

incertitude-type maximale coureur 63 kg



Dans le cas où les paramètres d'entrées sont mal connus, en particulier la masse du coureur à +/- 3 kg, c'est justement la masse du coureur qui a le poids le plus élevé sur l'incertitude composée.

3.9 Explications sur les marges d'erreur des paramètres d'entrée

Pour tous les paramètres, nous allons utiliser une loi de probabilité rectangulaire. C'est à dire que la

probabilité est équivalente dans tout le domaine de variation. Par exemple un Sc_x de $0,35 \pm 0,05$ m^2 sera compris entre 0,3 et 0,4 avec autant de chance d'avoir les valeurs 0,3, 0,35 ou encore 0,4.

altitudes:

Moyens utilisés : cartes, profil organisateur, site de cartographie numérique.

Plusieurs méthodes utilisées et comparées pour réduire des erreurs systématiques

1) Si point géodésique de nivellement marqué sur carte IGN ou carte suisse : ± 2 m

http://geodesie.ign.fr/index.php?page=points_geodesiques

2) Carte IGN ou carte suisse, estimation de l'altitude avec les courbes de niveau : ± 5 m

3) Autre (Tour d'Espagne) : ± 10 m

Distance (plus de 3km):

Moyens utilisés : cartes papier, carte numérique (géoportail), bikemap, profil des cols (par expérience ce sont les profils du Tour d'Italie qui sont le plus précis parmi les 3 grands Tours)

Incertitude type de la distance $u(\text{distance})$: ± 50 m

L'erreur sur la distance dépend de la trajectoire des coureurs, de la détermination des positions de départ et d'arrivée, de la qualité des images satellite (le site géoportail contient des orthophotos avec corrections optiques).

Exemple de mesure sur géoportail : viaduc de Millau, les espacements entre piliers est de 342m, il y a en 7 soit 2052m. Mesure avec géoportail 2057m puis 2054m soit 5m d'erreur pour une distance de 2 km. La mesure de distance est donc très précise avec géoportail.

C'est la trajectoire des coureurs qui va modifier le plus la distance parcourue donc nous garderons une incertitude-type de 50m pour une distance de 10km. L'erreur sera plus grande aussi dans le cas où il n'est pas aisé de positionner le point d'arrivée de l'étape sur la carte.

Temps de parcours :

± 1 s au mieux dans certains cas

± 10 s dans le cas où ne voit pas bien le passage des coureurs au point prévu pour la mesure

Température et masse volumique de l'air : erreur négligée, peu d'influence dans notre cas car les résistances aérodynamiques sont surtout influencées par la vitesse au carré.

Surface frontale effective Sc_x :

Moyens utilisés pour estimer la surface frontale : photos de face, estimation sur une série de photos $Sc_x \pm 0,05$

Le Sc_x est en réalité une valeur dynamique, les coureurs changent de position au cours des ascensions.

Une valeur moyenne de $0,35 m^2$ est utilisée et ajustée à la taille du coureur. Une simple relation est proposée dans cet article : Evaluation of aerodynamic and rolling resistances in mountain-bike field conditions, journal of sport science, W.M. Bernucci

$Sc_x = -0,189 + 0,304 * \text{taille}(m)$

Le Sc_x moyen pour une position haute en VTT a été de $0,357 \pm 0,023$. Les estimations ont été faites à des vitesses faibles inférieures à 8,5m/s. La position haute en VTT ressemble à celle d'un routier en montée. Cependant, les résistances aérodynamiques sont plus élevées avec un VTT qu'un vélo de route. Nous ne prenons pas trop de risques avec une marge d'erreur de $0,05 m^2$.

Cr : coefficient de roulement

De nombreuses mesures du coefficient de roulement ont déjà été réalisées (bicycle science, David

Gordon Wilson). La valeur la plus courante estimée sur route est de 0,004. Des mesures récentes le confirme :

<http://www.biketechreview.com/tires/rolling-resistance/475-roller-data> (Cr =0,0022 pour les pneumatiques les plus performants sur une surface très lisse, de 0,0033 à 0,0044 sur route)

Nous prendrons une incertitude type de 0,001 (25% d'incertitude relative). Ce coefficient pouvant varier entre autre avec l'état de surface des routes, les pneumatiques, la pression de gonflage. Les routes de montagne d'accès aux stations de sports d'hiver sont généralement en bon état sans être parfaitement lisses comme une autoroute. Les routes peuvent plus granuleuses sur certaines ascensions de cols.

Efficacité de la transmission

Les coureurs professionnels disposent tous de matériel haut de gamme et bien entretenu. Les différences de rendement des vélo différent peu entre équipes. Néanmoins ce paramètre peut être une source d'erreur systématique.

D'après le site <http://www.friction-facts.com/>, l'efficacité maximale est de 0,98. James Martin a estimé la perte de transmission à 2,4% lors de sa validation du modèle, soit une efficacité de 0,976. Nous utiliserons par défaut 0,975 +/- 0,005

4 Conclusion

Les deux cas exploitables pour une estimation de la puissance sont :

1) La puissance réelle avec bonne connaissance de la masse des coureurs (+/- 1kg), une cartographie très précise (Tour de France, Tour de Suisse), pas de vent, pas de drafting, pente supérieures à 7%, l'incertitude-type sera alors de 3%.

2) La puissance étalon peut être obtenue dans les mêmes conditions avec une incertitude-type de 2%. On rappelle bien sur que cette puissance étalon est un paramètre moins intéressant que la puissance réelle mais elle permet tout de même des comparaisons.

Il est conseillé d'effectuer plusieurs estimations de puissance sur une même ascension en modifiant par exemple les points de départ et d'arrivée ou en étudiant les performances de plusieurs coureurs dans les mêmes conditions.

3 points importants ne sont pas pris en compte par le modèle décrit en début du document :

1) Variations d'énergie cinétique :

La puissance calculée par le modèle suppose que le mouvement est rectiligne uniforme. En réalité, la vitesse d'un coureur n'est pas tout à fait constante : des changements de rythme peuvent survenir à tout moment et les variations de pente accélèrent ou ralentissent les coureurs. En toute rigueur il faudrait ajouter les variations d'énergie cinétique. La non prise en compte de cette dépense énergétique tend à une sous estimation de la puissance réellement développée.

2) Aspiration :

A partir d'une certaine vitesse, le phénomène de « drafting » diminue la résistance aérodynamique. Il est négligeable à faible vitesse.

3) Vent : il peut être favorable ou contraire. Dans tous les cas, nous nous réduirons à des estimations par force de Beaufort terrestre inférieure à 2. Cette information provient des sites de météorologie et des mesures de stations météo.

Dans un futur document, j'expliquerai comment estimer le drafting, limiter l'effet du vent et estimer sa vitesse et sa direction dans certaines situations.